Analiza zespolona
Lista 5

Zad 1. Dla jakich $c \in \mathbb{C}$ funkcje

$$f_1(z) = \begin{cases} \frac{Rez}{z}, & z \neq 0 \\ c, & z = 0 \end{cases}, \qquad f_2(z) = \begin{cases} \frac{Imz^2}{z^2} & z \neq 0 \\ c, & z = 0 \end{cases}$$

są ciągłe w zerze.

Zad 2. Wyznaczyć z definicji pochodną funkcji $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$, oraz $f(z) = \frac{1}{z}$.

Zad 3. Zbadać różniczkowalność w sensie zespolonym funkcji $\overline{z}$, $|z|$, $|z|^2$.

Zad 4. Zbadać holomorficzność funkcji

$a)$ $f(z) = \operatorname{Re} z \cdot z$, $\quad b)$ $f(z) = z^2$, $\quad c)$ $f(z) = \dfrac{1}{z}$, $\quad d)$ $f(z) = xy + iy$,

$e)$ $f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y$, $\quad f)$ $f(z) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$.

Zad 5. Zbadać różniczkowalność funkcji $f(z) = z \cdot \sin |z|$.

Zad 6. Znaleźć jawną postać f wiedząc, że funkcja f jest holomorficzna oraz

$a)$ $\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} z + 1$, $f(0) = 1 + i$, $\quad b)$ $\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z$, $f(0) = 0$.

Zad 7. Czy istnieje funkcja holomorficzna $f = u + iv$, taka, że

$a)$ $u = v$, $\quad b)$ $u = x^2 + y^2$, $\quad c)$ $v = \sin x$, $\quad d)$ $u = e^x - e^y$.

Zad 8. Wykazać, że jeśli funkcja holomorficzna przyjmuje tylko wartości rzeczywiste, to jest stała.

Zad 9. Wykazać, że jeśli funkcja f i funkcja do niej sprzężona $\overline{f}$ są różniczkowalne w sensie zespolonym w punkcie $z_0 \in \mathbb{C}$, to $f'(z_0) = 0$.

Zad 10. Jeśli $f = u + iv$ oraz $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, to u i v można traktować jako funkcje zmiennych r, φ. Pokazać, że u i v spełniają warunki Cauchy-Riemmana wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

Zad 11. Niech f będzie jedną z gałęzi $\sqrt{z}$ określoną dla $0 < \arg z < 2\pi$, $z \neq 0$. Wykazać, że f jest funkcją analityczną i wyznaczyć $f'(z)$.

Zad 12. Wykazać, że jeśli u jest częścią rzeczywistą pewnej funkcji holomorficznej, to u jest funkcją harmoniczną, czyli spełnia równanie Laplace'a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Na odwrót pokazać, że każda funkcja harmoniczna jest częścią rzeczywistą pewnej funkcji holomorficznej. Jak rzecz ma się dla części urojonej funkcji holomorficznej?

Zad 13. Sprawdzić, że podane funkcje są harmoniczne oraz znaleźć funkcje harmoniczne z nimi sprzężone:

$a)$ $u = \dfrac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$, $\quad b)$ $u = 2x - x^3 + 3xy^2$, $\quad c)$ $u = \cos\cos y$, $\quad d)$ $u = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$